exercice 1

Ou bien : $y(t+h) = y(t) + hF(t, y(t))$.

ici On a $F(t, y(t)) = f(t) = y'(t)$.

d'où $y(t+h) = y(t) + h\, y'(t)$. $\Bigg\} \Rightarrow y(t+h) = y(t) + h(-y(t))$ 3

Or $y'(t) = -y(t)$

$\rightarrow y(t+h) = (1-h)\, y(t)$.

Si On pose : $t_n = t_0 + nh$.

$y(t_{n+1}) = (1-h)\, y(t_n)$.

lorsque l'on numérise on posant :

$U_n = y(t_n)$.

On Obtient le schéma d'Euler Explicite :

$$\boxed{U_{n+1} = (1-h)\, U_n}$$ avec $t_n = t_0 + nh$.

avec : $y(t_n) = e^{-t_n}$.

3/- On a $U_{n+1} = (1-h)\, U_n$ ; $U_n = y(t_n)$.

$U_0 = y(0) = 1$.

$U_1 = (1-h) \cdot U_0 = 1-h$.

$U_2 = (1-h)\, U_1 = (1-h)^2$

$\vdots$

$U_n = (1-h)\, U_{n-1} = (1-h)^n$

4/- On a

pour $h = 2{,}5$ $U_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ alors que $y(t_n) = e^{-\frac{5}{2}n}$

pour $h = 1{,}5$ $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ alors que $y(t_n) = e^{-\frac{3}{2}n}$

pour $h = 0{,}5$ $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors que $y(t_n) = e^{-\frac{1}{2}n}$

d'où le tableau suivant ainsi que les tracés [illegible] cas sur l'intervalle [0

On remarque : la variation du pas met en valeur evidence l'amplification de l'erreur entre la solution exacte et la solution approché par le pas $h = 2.5$ et ceci d'un pas à l'autre.

5/ stabilité de la methode.

On a $U_{n+1} = (1-h)^{n+1}$

On en deduit que si $0 < h < 1$ la solution numerique est stable et convergente

si $1 < h < 2$ la solution oscille mais reste convergente.

si $h > 2$ la solution numerique oscille et diverge.

en effet on sait que la methode n'est stable que si et seulement si $|1-h| < 1$

en effet le critère de stabilité etant.

$$-1 \leq \frac{U_{n+1} - U_c}{U_n - U_c} \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{(1-h)^{n+1} - 0}{(1-h)^n - 0} \right| \simeq |1-h| < 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Remarque : la suite obtenue est une suite geometrique de raison $r = 1-h$, or on sait qu'une telle suite.

→ diverge si $|r| > 1$ ou $r = -1$

→ stationnaire si $r = 1$

→ converge vers 0 si $|r| < 1$

tableau + Courbe.

exercice 2

1) la solution exacte est clairement $y(t) = e^{-t}$

2) La solution d'Euler implicite est défini par

$$\begin{cases} y(0) = u(0) = 1 \\ u_{k+1} = u_k + h_k f(u_{k+1}, t_{k+1}) \end{cases}$$

3

Où $h_k = h$.

$$\begin{cases} u(0) = y(0) = 1 \\ u_{k+1} = u_k + h(-u_{k+1}) = u_k - h u_{k+1} \end{cases}$$

$$u_{k+1} = \frac{1}{1+h} u_k \qquad \forall k = 0 \ldots n.$$

avec $nh = T$ si il existe dans l'intervalle $t \in [0, T]$.

3) $\Rightarrow$ $u_{k+1} = \frac{1}{(1+h)^{k+1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{T}$

alors que le cas explicite on avait:

$$u_{k+1} = (1-h)^{k+1} \qquad \frac{1}{(1+h)^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-T} \text{ avec } nh = T$$

la methode est stable.

en effet $\frac{1}{\left(1 + \frac{t_n}{n}\right)^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-t_n} = e^{T}$

4) Comparaison

- On remarque que la solution approché par Euler implicite reste "proche" de la solution exacte.
- elle est aussi positive même pour le pas de $h$ ↗
  Contrairement à Euler explicite
- mais est elle pour autant meilleur ?

le cas $\begin{cases} y'(t) = + y(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ montre le contraire

5) en effet la solution exacte ici est $f(t) = e^{t}$

a) - la solution explicite avec $h = cte$ nous donne

$$u_{k+1} = u_k + h u_k = (1+h) u_k$$

$$u_{k+1} = (1+h)^k \xrightarrow[k \to \infty]{} e^{T}$$

exercice 2

c/ - dans le shema implicite

$$U_{k+1} = U_k + h\, U_{k+1}$$

$$U_{k+1} = \frac{1}{1-h}\, U_k = \frac{1}{(1-h)^{k+1}}$$

d/ On note que la solution donné par le shema explicite reste raisonable même pour les grand pas alors que la solution donneé pour le shéma implicite

- est pas ~~de~~ defini pour $h = 1$
- si $h \simeq 1$ la solution explose
- defini pour $h > 1$ on perd la positivite de la solution approché.

pour $h = 2$ par exemple, la valeur de la solution approcheé oscille entre $-1$ et $1$.

e/ On ne peut pas conclure que au choix entre explicite et implicite, selon la problématique c'est une ou l'autre qui fait être la meilleur adopté

## Ex4:

1/ la fct verifie la condition de lipshitz :

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = |(1 + y_1) - (1 + y_2)|$$

une ~~cte de lipshitz associé~~

$$= |y_1 - y_2|$$

une cte de lipshitz associé à $f$ est égale a $-1$

toute cte de lipshitz de $f$ est superieur ou egale à $1$. la fonction $f$ etant continu sur $[0, 1] \in \mathbb{R}$

les hypothesé du ~~troisième~~ théorème de Cauchy-lipshitz sont verifieé $\Rightarrow$ le probléme de Cauchy a une solution unique :

On montre facilement que cette solution est

$$y(t) = e^t - 1 .$$

2) a) La methode d'Euler exacte pour cet exemples nous donne comme shéma :

$$y_{n+1} = y_n + h(1 + y_n) = (1+h)\, y_n + h$$

pour $h = 0,1$ $\begin{cases} y_{n+1} = 1,1\, y_n + 0,1 \\ y_0 = 0 . \end{cases}$

Il faut 10 pas pour obtenir $y(1)$ on obtient successivement :

$y_1 = 1,1\, y_0 + 0,1 = 0,1 .$

$y_2 = 1,1\, y_1 + 0,1 = 0,21$

$y_3 = 1,1\, y_2 + 0,1 = 0,331 .$

$y_4 = 1,1\, y_3 + 0,1 = 0,4641 .$

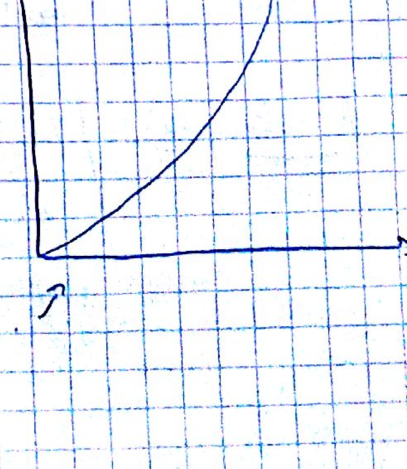
$y_5 = 1,1\, y_4 + 0,1 = 0,61051$

$y_6 = 1,1\, y_5 + 0,1 = 0,771561 .$

b) ce qui nous donne le tableau suivant ainsi que les 2 courbes

$\begin{cases} y(t) = e^t - 1 \quad \text{pour } t \in [0, 10] \ ? \\ y_{n+1} = 1,1\, y_n + 0,1 \quad \text{pour } n = 10 \end{cases}$

| $t_n$ | $y_n$ | $y(t_n)$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,1 | 0,1 | 0,105 | 0,005 |




↖ Voir le corrigé. ↗

On a $y_{n+1} = (1+h)\, y_n + h$ avec $y_0 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 + y_{n+1} = (1+h)(1+y_n) \\ \text{Or } 1 + y_0 = 1 \end{array}\right\} \quad y_n = (1+h)^n - 1.$$

l'erreur

$$\Rightarrow e_n = y(t_n) - y_n = (e^{t_n} - 1) - (1+h)^n - 1$$

$$= e^{t_n} - (1+h)^n = e^{t_n} - \left(1 + \frac{t_n}{n}\right)^n.$$

$h = \frac{t_n}{n}$

$$\left\{\begin{array}{l} e_n \to 0 \\ n \to \infty \end{array}\right. \Rightarrow \text{la methode est Convergente.}$$

3/ Effet d'une perturbation des cdt initiales :

a/- les solutions approchee $U_n$ du systéme.

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = 1 + y(t) = f(t) \quad \text{pour } t \in [0, 1]. \\ \text{et} \\ y(0) = \alpha \end{array}\right.$$

est donneé par $U_n = (1+h)^n (1+\alpha) - 1$.

et Celle du systeme $\left\{\begin{array}{l} z'(t) = 1 + z(t) = g(t) \quad t \in [0, 1] \\ \text{et } z(0) = \beta. \end{array}\right.$

est donneé par $V_n = (1+h)^n (1+\beta) - 1$.

d'ou $|U_n - V_n| = (1+h)^n |\alpha - \beta| \leq e^{nh} |\alpha - \beta| \leq e\, |\alpha - \beta|$

$\Rightarrow$ une faible perturbation des cdt intiale perturbe peu ~~pert~~ la solution

$\Rightarrow$ la methode est stable pour cet exemple.

__A note que__ : la Convergences et la stabilité sont assuré car

(i) la methode d'Euler est Consistante

(ii) la fct f est lipsitzienne en y uniformement en t

# exercice 5

~~$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2})(1+y$~~

$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2} ; y_n + \frac{h}{2} k_1) = 1 + y_n + \frac{h}{2} k_1$.

$= (1 + \frac{h}{2})(1 + y_n)$.

$y_{n+1} = y_n + h k_2 = y_n + h(1 + \frac{h}{2})(1 + y_n)$.

$= (1 + h + \frac{h^2}{2})(1 + y_n) - 1$

$= (1 + h + \frac{h^2}{2}) y_n + h + \frac{h^2}{2}$.

Ce qui nous donne pour $h = 0,1$.

$y_1 = 1,105\, y_0 + 0,105 = 0,105$.

$y_2 = 1,105\, y_1 + 0,105 = 0,2210$

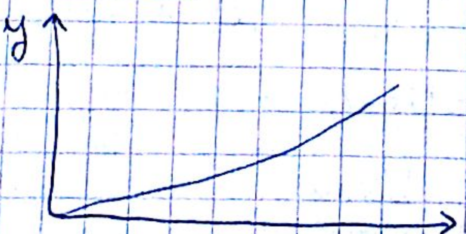
$y_3 = 1,105\, y_2 + 0,105 = 0,3492$.

$y_4 = 1,105\, y_3 + 0,105 = 0,4909$.

le tableau suivant :

tableau   Courbe (Voir photo).

| $y_n$ numerique | $y(t_n)$ exacte | $e_n$ l'erreur |
|---|---|---|




3/ Comparaison RK et Euler explicite

Les resultats obtenus par RK² (Euler modifie).

sont bien meilleurs que ceux obtenus par Euler.

les calculs sont à ~~faire~~ peint plus long.

En effet la methode est de range 2 donc il y a sensiblement deux fois plus de calcul mais l'erreur est en ~~O(kk2)~~ $O(h^2)$ (l'ordre etant egale a 2) donc l'ordre est ~~mett~~ nettement plus faible par Rk2 que par Euler.

## Ex6

1) le calcule de la Valeur approché de $y(1)$ par RK4 avec un pas $h = 0{,}1$

$$k_1 = f(t_n, y_n) = 1 + y_n$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right) = 1 + y_n + \frac{h}{2} k_1$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h \frac{k_2}{2}\right) = 1 + y_n + h \cdot \frac{k_2}{2}$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + h k_3) = 1 + y_n + h k_3$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

avec le pas $h = 0{,}1$ on obtient,

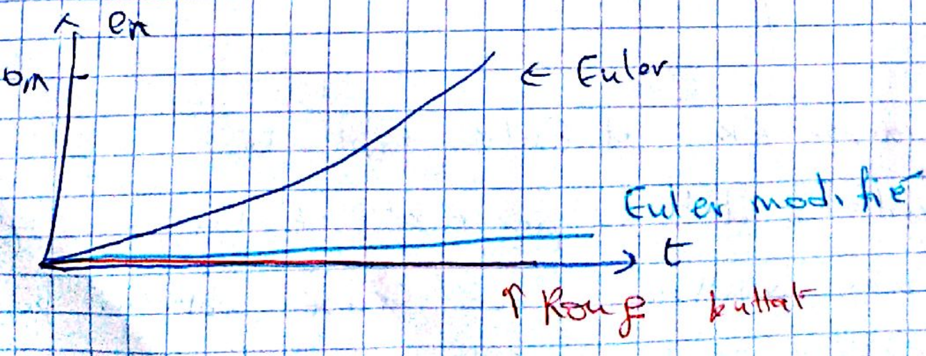
Tableau

2) en suite en rassamblant tous les resultats, Valeur exacte $y(t_n)$, approchee $U_n$, et l'erreur $e_n = y(t_n) - U_n$

On obtient :

Tableau

3)




Commentaire.

Il est relativement aisé de voir que RK4 est la ~~meth~~ methode la plus precise suivi par RK2 de loin avant la methode d'Euler.

## Serie 1.

1/ Formule du rectangles $n = 1$, $t_1 = 0$.

la base de Lagrange associé est $L_1(t) = 1$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

le poids $\omega_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)\, dt = 2$.

→ d'où $I(f) = L_h(f)$

$$I(f) = L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \omega_1 f\left(x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{t_1 + 1}{2}\right)$$

$$I(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2}\, 2\, f\left(x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{0+1}{2}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)\, f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right).$$

2/ Formule de Trapeze $n = 2$; $t_1 = -1$, et $T_2 = 1$

La base associé de Lagrange etant $L_1(t) = (t - t_2)/(t_1 - t_2) = (1-t)/2$ et

$L_2(t) = (t - t_1)/(t_2 - t_1) = (t+1)/2$

→ les poids sont :

$\omega_1 = \int_{-1}^{1} L_1(t)\, dt = 1$ et $\omega_2 = \int_{-1}^{1} L_2(t)\, dt =$

d'où $I(f) = L_h(f) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{2} \Big[\omega_1 f\big(x_i + (x_{i+1} - x_i) \frac{t_1 + 1}{2}\big)$

$+ \omega_2 f\left(x_i + (x_{i+1} - x_i)\frac{t_2 + 1}{2}\right)\Big].$